Notas para el curso Seminario de Análisis Combinatorio

Octavio Páez Osuna
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

April 28, 2011

Contents

Chapter 1

Principios de conteo

Un principio de conteo fundamental es el siguiente

Teorema 1.0.1. *Si $n+1$ objetos son colocados en n cajas entonces almenos una caja contiene mas de dos de dichos objetos.*

El Teorema 1.0.1 no nos dice cual es la caja que contiene mas de dos objetos. Simplemente asegura la existencia de dicha caja. Entonces cuando apliquemos dicho principio para resolver algún problema combinatorio, no nos dará información acerca de cómo construir la solución.

Ejemplo. En un grupo de trece personas hay almenos dos de ellas que nacieron en el mismo mes. Notemos que en un grupo de doce personas no podemos garantizar este resultado.

Ejemplo. Una bolsa contiene cien manzanas, cien naranjas y cien peras. Queremos determinar el número de frutas que debemos tomar de la bolsa para garantizar que hemos tomado almenos una docena de piezas de la misma fruta. Una manera de resolver este problema es la siguiente: pensamos en el peor de los casos, es decir que hemos tomado once manzanas, once naranjas y once peras. En estas situacin, la siguiente fruta que tomemos, sin importar el tipo, nos garantiza que tenemos una docena de frutas del mismo tipo. Entonces al tomar $11+11+11+1=34$ garantizamos que hemos tomado una docena de frutas del mismo tipo.

El ejemplo anterior corresponde a la forma fuerte del principio 1.0.1 que a continuación formalizamos

Teorema 1.0.2. *Sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ enteros positivos. Si*

$$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$$

objetos son colocados en n cajas, entonces la primera caja contiene q_1 objetos o la segunda caja contiene q_2 objetos o $\cdots$ o la n-ésima caja contiene q_n objetos.

Demostración: Si al distribuir dichos objetos en las n cajas se tiene que la cantidad de objetos en la i-ésima caja es menor a q_i para $i = 1, \ldots, n$ entonces el número de objetos distribuidos es menor o igual a

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n.$$

El número anterior nos indica que falta poner un objeto mas. Esto garantiza que para alguna i la i-ésima caja contien q_i objetos.$\square$

El Teorema 1.0.2 se le conoce como la versión fuerte del Teorema 1.0.1 pues si tomamos $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 2$ entonces $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1 = n + 1$.

1.1 Números de Ramsey

Comenzamos esta sección con el iguiente juego: se marcan seis puntos en el plano, tres a tres no colineales (*i.e.* en posición general). Dos jugadores, en cada turno, unen pares de puntos con lineas rectas. Cada jugador traza sus lineas con un color asignado. El primer jugador en completar un triángulo monocromático gana.

En este juego siempre hay un ganador. En efecto, fijandonos en un punto en particular,digamos P, este deberá estar unido a los otros cinco puntos dados. Por el principio 1.0.1 hay almenos tres rectas de color verde. Si A, B y C son los otros tres puntos usados por dichas rectas entonces ninguna de las rectas AB, AC ni BC pueden ser de color verde pues formaríamos un triángulo verde (por ejemplo el triángulo PAB). Entonces tenemos que el triángulo ABC es negro. Como vimos en clase, este juego puede no tener ganador si jugamos con cinco puntos en lugar de seis.

Podemos enunciar lo anterior de la siguiente manera: El número mas pequeño n de elementos que debe tener un conjunto para que al bicolorear (no importando como) sus $n(n-1)/2$ 2-subconjuntos y garantizar que contenga un subconjunto de tamaño 3 tal que todos sus 2-conjuntos sean verdes o que contenga un subconjunto de tamaño 3 tal que todos sus 2-conjuntos sean negros es 6.

Teorema 1.1.1. *Sean $t \geq 1$ y $q_1, q_2 \geq t$ dados. Existe un entero positivo mínimo $R_t(q_1, q_2)$ con la siguiente propiedad: Sea S un conjunto con n elementos. Supongamos que todos los t-subconjuntos de S son divididos en dos familias T_1 y T_2 (colores). Entonces si $n \geq R_t(q_1, q_2)$, existe i, $1 \leq i \leq 2$, y algún q_i-subconjunto de S tal que todos sus t-subconjuntos pertenecen a T_i.*

Demos.: Del ejemplo del párrafo anterior tenemos que $R_2(3,3) = 6$. Notemos primero que $R_1(q_1, q_2) = q_1 + q_2 - 1$ y que esto no es mas que el principio 1.0.2. Por otro lado, para toda $t \geq 1$ y para $q_i \geq t$, $1 \leq i \leq 2$ tenemos que

$$R_t(q_i, t) = R_t(t, q_i) = q_i. \tag{1.1}$$

Estas dos últimas observaciones sugieren una prueba por inducción doble (sobre t y sobre $q_1 + q_2$). Supongamos pues que el Teorema es cierto para $t-1$. Definimos $q_3 := R_t(q_1 - 1, q_2)$ y $q_4 := R_t(q_1, q_2 - 1)$ (esta es nuestra hipótesis de inducción sobre $q_1 + q_2$) basados en 1.1.

Sea S un conjunto con $n \geq R_{t-1}(q_3, q_4) + 1$ elementos. Coloreamos los t-conjuntos de S en verde y en negro. Sean $a \in S$ y $S' := S - \{a\}$. Coloreamos al $t-1$-subconjunto X de S' con el mismo color de $X \cup \{a\}$. Por inducción sobre t, S' contiene ya sea un subconjunto A de cardinalidad q_3 tal que todos sus $(t-1)$-subconjuntos son verdes o un subconjunto B de cardinalidad q_4 tal que todos sus $(t-1)$-subconjuntos son negros. Sin pérdida de generalidad supongamos que sucede lo primero.

Como A tiene cardinalidad $q_3 = R_t(q_1 - 1, q_2)$ entonces hay dos posibilidades: La primera es que A contiene un subconjunto de cardinalidad q_2 tal que todos sus t-subconjuntos son negros. En este caso terminamos con la demostración del Teorema. La segunda posibilidad es que A contenga un subconjunto A' de cardinalidad $q_1 - 1$ tal que todos sus t-subconjuntos son verdes. El conjunto $A \cup \{a\}$ tiene la misma propiedad pues $A' \subseteq A$. Con esto queda demostrado el Teorema.■

La demostración del Teorema anterior también nos dice que

$$R_t(q_1, q_2) \leq R_{t-1}(R_t(q_1 - 1, q_2), R_t(q_1, q_2 - 1)) + 1. \tag{1.2}$$

Un caso especial de 1.2 es cuando $t = 2$ (aristas)

$$R(q_1, q_2) \leq R(q_1 - 1, q_2) + R(q_1, q_2 - 1) \tag{1.3}$$

1.2 Principios de la suma y producto

Una **partición** de un conjunto S es una colección $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de subconjuntos de S tales que cada elemento de S pertence a exactamente uno de esos subconjuntos. Es decir

$$S = \cup_{i=1}^{k} S_i,$$
$$S_i \cap S_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

A los subconjuntos S_i se les llama las partes de la partición. En nuestro contexto no tiene sentido considerar particiones con partes vacías.

El **Principio de la Suma** nos dice que si $S_1, S_2, \ldots, S_k$ es una partición de S entonces

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_k|. \tag{1.4}$$

El **Principio del Producto** es una aplicación del principio de la suma en un caso especial: supongamos que $S = A \times B$ con $|A| = r$ y $|B| = s$. Definimos S_i como el subconjunto de elementos de S con primera coordenada igual a a_i. Entonces $S_1, S_2, \ldots, S_r$ es una partición de S. Por el principio de la suma tenemos que

$$\begin{aligned} |S| &= |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_r| \\ &= s + s + \cdots + s \\ &= r \cdot s. \end{aligned}$$

1.3 Permutaciones y combinaciones

Sea S un conjunto de cardinalidad n y sea r un entero positivo. Una **r-permutación** de S es un arreglo ordenado de r elementos de S. Denotaremos por

$$P(n, r)$$

al número total de r-permutaciones de un conjunto de cardinalidad n. Es claro que $P(n, 1) = 1$. A una n-permutación de un conjunto S de cardinalidad n le llamaremos simplemente **permutación** de S.

Cuando construimos una r-permutación de S iniciamos escogiendo cualquiera de los n posibles elementos de S. Para elegir el segundo elemento de la r-permutación tenemos $(n-1)$ posibilidades, etc. Por lo que

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Recordemos que

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ n(n-1)! & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Entonces

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Una r**-combinación** de S es una selección no ordenada de r elementos de S. Denotaremos por

$$C(n,r)$$

al número de r-combinaciónes de S. Notemos que para construir una r-permutación de S, primero elegimos r elementos de S y luego los escribimos en cierto orden. Es decir

$$C(n,r) \cdot r! = P(n,r)$$

por lo que

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

1.4 Multiconjuntos

Un **multiconjunto** M es como una bolsa del tianguis en tanto que puede contener mas de un objeto de un tipo dado: 4 manzanas, 5 tomates, 2 calabacitas, etc. Queremos calcular el número de permutaciones y el número de combinaciones de un multiconjunto M con k tipos de objetos distintos y con n_i objetos del tipo i, $i = 1 \ldots, k$. De ahora en adelente llamaremos al nuúmero n_i el **número de repetición del tipo** i. Es conveniente considerar el caso $n_i = \infty$ para cierto tipo de problemas donde no queremos restringir la disponibilidad de objetos de cierto tipo. Por ejemplo, para escribir números en el sistema decimal hacemos uso del multiconjunto

$$D = \{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3, \infty \cdot 4, \infty \cdot 5, \infty \cdot 6, \infty \cdot 7, \infty \cdot 8, \infty \cdot 9\}.$$

1.5 Ejercicios

1. Demuestra que al elegir $n+1$ enteros del conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, sin importar cómo, siempre hay almenos dos que difieren en a lo mas 2.

2. Demuestra que dados 52 enteros culesquiera, siempre hay dos de ellos cuya suma o diferencia es divisible entre 100.

3. Sea S un conjunto de seis puntos en el plano tres a tres no colineales. Coloreamos las 15 aristas que determinan en dos colores, digamos verde y negro. Dumuestra que hay almenos dos triángulos monocromáticos determinados por los puntos de S. (Pueden ser dos verdes, uno verde y uno negro o dos negros)

4. Demuestra que en cualquier grupo de n personas hay siempre dos de ellas que conocen al mismo número de personas. (Suponiendo que una persona no se conoce a si misma)

5. En una fiesta hay 100 personas. Supongamos que cada persona tiene un número par de conocidos (puede ser cero). Demuestra que hay tres personas en la fiesta con el mismo número de conocidos. (Suponiendo que una persona no se conoce a si misma)

6. Demuestra que al escoger cualesquiera 5 puntos de un cuadrado de lado 2 hay dos de ellos cuya distancia es a lo más $\sqrt{2}$.

7. Una colección de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ tiene la propiedad que cada par de subconjuntos tiene almenos un elemnto en común. Demuestra que hay a lo mas 2^{n-1} subconjuntos en la colección.

8. Un pelotón del ejército se forma en un rectángulo en filas y columnas. El sargento los ordena por columnas de menor a mayor estatura. Luego los ordena por filas de menor a mayor estatura. Demuestra que no tiene que volver a ordenarlos por columnas.

9. Demuestra que la expresión decimal del racional $\frac{p}{q}$ es eventualmente periódica.

10. Demuestra que para cualesquiera $n+1$ enteros $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ existen dos índices i y j, $i \neq j$ tal que $a_i - a_j$ es divisible entre n.

11. Cuenta el número de enteros mayores a 5400 tales que

    a) Sus dígitos son distintos.

    b) Los dígitos 7 y 2 no aparecen.

12. Un salón tiene 2 filas de 8 asientos cada una. Hay 14 estudiantes, 5 de los cuales siempre se sientan en la primera fila y 4 de los cuales siempre se sientan en la segunda fila. Calcula el número de manerasdistintas en las cuales los 14 estudiantes se pueden sentar.

13. Determina en número de 10-permutaciones del multiconjunto $s = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$.

14. Construye un ejemplo de un Código de Gray no cíclico de orden 3.

15. Demuestra que

$$1 + \frac{1}{2}C(n,1) + \frac{1}{3}C(n,2) + \cdots + \frac{1}{n+1}C(n,n) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

16. Usa un argumento combinatorio para demostrar que

$$C(n,k) - C(n-3,k) = C(n-1,k-1) + C(n-2,k-1) + C(n-3,k-1).$$

hint: Supón que S es un conjunto con tres elementos distinguidos.

17. Determina los coeficientes de x^5y^{13} y de x^8y^9 en la expansión de $(3x - 2y)^{18}$.

18. Demuestra que $R(3,3,3) \leq 17$ (fíjate en un vértice, hay 6 aristas de un mismo color). Luego da una coloración, en tres colores, de K_{16} sin triángulos monocromáticos. Con esto demuestras que $R(3,3,3) = 17$.

19. Demuestra que $R(3,4) \leq 9$. Sugerencia: primero demuestra el resultado suponiendo que existe un vértice (punto) con cuatro aristas negras o seis aristas verdes. Despues demuestra que es imposible tener tres aristas negras y cinco verdes en todos los vértices.

20. Demuestra que $R(3,4) > 8$. Sugerencia: etiqueta los vértices con los residuos módulo 8. Colorea la arista $\{i, j\}$ de acuerdo a la clase de equivalencia de $i - j$ módulo 8.

Chapter 2

Generación de configuraciones combinatorias

2.1 Algoritmo de retroceso

2.2 Generación de Permutaciones y combinaciones

Chapter 3

Teorema del binomio

3.1 Fórmula de Pascal y Teorema del binomio

3.2 Identidades

3.3 Ejercicios

1. Demuestra, mediante un razonamiento combinatorio, que

$$\sum_{i=0}^{n} iC(n,k) = n2^{n-1}.$$

3.4 Teorema de Newton

Chapter 4

Principio de inclusión-exclusión

4.1 Ejercicios

1. Sea n un entero positivo. Usa el principio de inclusión-exclusión para derivar una fórmula para la función $\varphi(n)$ que cuenta el número de enteros positivos menores que n que son primos relativos a n.

2. Encuentra el número de enteros entre 1 y 10000 que no son divisibles entre $4, 6, 7$ y 10.

3. Determina el número de 10-combinaciones del multiconjunto

$$M = \{\infty \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$$

4. Determina el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

tales que

$$1 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 7, 4 \leq x_3 \leq 8, 2 \leq x_4 \leq 6.$$

5. Determina el número de permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ tales que al menos un entero impar está en su posición natural.

6. En un restaurant 7 personas entregan sus sombreros (idénticos). De cuantas maneras se pueden regresar sus sombreros de tal manera que

a. ninguno reciba su sombrero.

b. al menos uno de ellas reciba su sombrero.

c. al menos dos de ellas reciban su sombrero.

7. Ocho personas se suben a los caballitos en una feria. Encuentra el número de formas en que pueden intercambiar asientos, de tal manera que cada una de ellas tenga enfrente a una persona diferente.

8. Ocho personas se sientan en una mesa redonda. Encuentra en número de formas en que pueden intercambiar asientos de tal manera que cada uno de ellos se siente enfrente de una persona diferente.

9. Encuentra el número de formas en que 8 torres iguales se pueden colocar en un tablero de ajedrez de tal manera que no se ataquen y que ninguna de las torres esté situada en la diagonal principal.

10. Encuentra el número de tableros de ajedrez coloreados con ocho colores, de tal manera que las casillas con un lado común tengan colores distintos y que en cada renglón se encuentren los ocho colores.

11. Sea $n \geq 6$. Demuestra que en el conjunto
$$\{n+1, n+2, \ldots, n+30\}$$
no puede haber más de ocho números primos.

12. Una secretaria debe enviar n cartas a n direcciones distintas. Escribe las direcciones en los sobres y luego, aleatoriamente, coloca las cartas dentro de los sobres. Calcula el promedio de cartas que llegarán a su destinatario.

Chapter 5

Funciones generadoras y relaciones de recurrencia

5.1 Funciones generadoras

La **función generadora** para un conjunto S de configuraciones respecto de una **función de peso** ω se define como

$$\Phi_S(x) = \sum_{\sigma \in S} x^{\omega(\sigma)},$$

donde $\omega(\sigma)$ es un entero no negativo.

Teorema 5.1.1. *Supongamos que*

$$\Phi_S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Entonces a_n es el número de configuraciones de peso n.

Demos.

$$\begin{array}{rcl} \Phi_S(x) & = & \sum_{\sigma \in S} x^{\omega(\sigma)} \\ & = & \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \in S : \omega(\sigma) = n} x^n \\ & = & \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{\sigma \in S : \omega(\sigma) = n} 1. \end{array}$$

Pero $\sum_{\sigma \in S : \omega(\sigma) = n} 1$ es el número de configuraciones de S de peso n. ■

Ejemplo. Podemos extraer cierta información de $\Phi_S(x)$. Supongamos que tenemos en el bolsillo 3 monedas de 10, 4 moedas de 5, 8 monedas de 2 y 2 monedas de 1. Nuestro conjunto S es el conjunto de monedas en nuestro bolsillo. La función de peso que vamos a utilizar es el valor monetario de cada moneda. De esta manera la función generadora para S (nuestro bolsillo) es

$$\Phi_S(x) = 2x + 8x^2 + 4x^5 + 3x^{10}.$$

Evaluando $\Phi_S(1) = 2+8+4+3 = 17$ obtenemos el número total de monedas en nuestro bolsillo. Evaluando $\Phi'_S(1) = 2 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 68$ el valor monetario de nuestro bolsillo.

En general, cuando S es un conjunto finito, $\Phi'_S(1) = \sum_{\sigma \in S} \omega(\sigma)$ es el peso total del conjunto S.

5.2 Lemas de la suma y el producto

A veces es conveniente dividir un problema en partes mas pequeñas.

Teorema 5.2.1 (Lema de la Suma)**.** *Supongamos que* $S = A_1 \cup A_2$ *con* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$*. Entonces*

$$\Phi_S(x) = \Phi_{A_1}(x) + \Phi_{A_2}(x).$$

Demos.

$$\Phi_S(x) = \sum_{\sigma \in A_1 \cup A_2} x^{\omega(\sigma)} = \sum_{\sigma \in A_1} x^{\omega(\sigma)} + \sum_{\sigma \in A_2} x^{\omega(\sigma)}. \blacksquare$$

Usando el Teorema anterior vemos que $|S| = \Phi_S(1) = \Phi_{A_1}(1) + \Phi_{A_2}(1) = |A_1| + |A_2|$ como era de esperarse.

Teorema 5.2.2 (Lema del Producto)**.** *Sean* A_1 *y* A_2 *conjuntos de configuraciones con funciones de peso* ω_1 *y* ω_2 *respectivamente. Si* $S = A_1 \times A_2$*, con función de peso* ω*, y si* $\omega(\sigma) = \omega_1(a_1) + \omega_2(a_2)$ *para toda* $\omega = (b_1, b_2) \in S$ *entonces* $\Phi_S(x) = \Phi_{A_1}(x) \cdot \Phi_{A_2}(x)$*.*

Demos.

$$\begin{array}{rcl} \Phi_S(x) & = & \sum_{\sigma \in S} x^{\omega(\sigma)} \\ & = & \sum_{(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2} x^{\omega_1(a_1) + \omega_2(a_2)} \\ & = & \left[\sum_{a_1 \in A_1} x^{\omega_1(a_1)}\right] \left[\sum_{a_2 \in A_2} x^{\omega_2(a_2)}\right]. \blacksquare \end{array}$$

Usando el Teorema anterior vemos que $|S| = \Phi_S(1) = \Phi_{A_1}(1) \cdot \Phi_{A_2}(1) = |A_1| \cdot |A_2|$ como era de esperarse.

5.3 Series binomiales

Un caso especial del Teorema del Binomio es cuando $a = -1$:

$$(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} \frac{(-1)(-2)\cdots(-i)}{k!}(-x)^k$$

el cual da origen a la serie geométrica

$$(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^k$$

Si $a = -m$ un entero negativo tenemos

$$(1-x)^{-m} = \sum_{i\geq 0} \frac{m(m+1)\cdots(m+i-1)}{i!} = \sum_{i\geq 0} C(m+i-1,m)x^k.$$

Ejemplo. Queremos determinar el número de soluciones enteras no negativas a la ecuación $y_1 + \cdots + y_k = n$, con k y n naturales fijos. Para poner este problema en el contexto de funciones generadoras procedemos de la siguiente manera: Definimos N_i como el subconjunto de enteros $\geq i$. Sea $S = N_0 \times N_0 \times \cdot \times N_0 = N_0^k$. Toda solución $(y_1,\ldots,y_k)$ a la ecuación es un elemento de S con la restricción $y_1 + \cdots + y_k = n$. Entonces definimos la función de peso en S como $\omega(y_1,\ldots,y_k) := y_1 + \cdots + y_k$. La solución a nuestro problema es encontrar el coeficiente de x^n, denotado por $[x^n]\Phi_S(x)$, de la función generadora $\Phi_S(x)$.

Continuando con el ejemplo, tenemos que $S = N_0^k$ es un producto cartesiano. Quisieramos usar el Lema del Producto. Para esto definimos $\omega(y_i) := y_i$ para toda $y_i \in N_0$. Y entonces $\omega(y_1,\ldots,y_k) = \omega(y_1) + \cdots + \omega(y_k)$. Ahora si, por el Lema del Producto

$$\Phi_S(x) = \Phi_{N_0^k}(x) = (\Phi_{N_0}(x))^k.$$

Por el Lema de la Suma tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{N_0}(x) & = & \sum_{i\geq 0} \Phi_{\{i\}}(x) \\ & = & \sum_{i\geq 0} x^i. \end{array}$$

Entonces la solución al problema es

$$[x^n](\sum_{i\geq 0} x^i)^k.$$

Por el Teorema del Binomio con $a = -k$ obtenemos que

$$[x^n](\sum_{i\geq 0} x^i)^k = [x^n]((1-x)^{-1})^k = [x^n]((1-x)^{-k}) = C(n+k-1, n).$$

Como era de esperarse. Podemos modificar un poco el problema, por ejemplo, podemos pedir que $y_i \geq i$ para $i = 1, \ldots, k$. En este caso $S = N_i \times \cdots \times N_k$. La función generadora que nos resuelve el problema es

$$\begin{array}{rcl} \Phi_S(x) & = & \prod_{i=1}^k \Phi_{N_i} \\ & = & \prod_{i=1}^k \sum_{j\geq i} x^j \\ & = & \prod_{i=1}^k x^i(1-x)^{-1} \\ & = & x^{1+2+\cdots+k}(1-x)^{-k} \\ & = & x^{C(k+1,2)}(1-x)^{-k} \end{array}$$

y la solución es

$$[x^n]x^{C(k+1,2)}(1-x)^{-k} = C(n - C(k+1,2) + k - 1, n - C(k+1,2)).$$

A las soluciones de la ecuación $y_1 + \cdots + y_k = n$ donde $y_i \geq 1$ se les llama **composición** del entero n con k partes. El número total de composiciones con k partes de n es igual a

$$\begin{array}{rcl} [x^n]\Phi_S(x) & = & [x^n]\Phi_{N_1^k}(x) \\ & = & [x^n](\Phi_{N_1}(x))^k \\ & = & [x^n](\sum_{i\geq 1} x^i)^k \\ & = & [x^n](x(1-x)^{-1})^k \\ & = & [x^n]x^k(1-x)^{-k} = [x^{n-k}](1-x)^{-k} \\ & = & C(k+n-k-1, n-k) = C(n-1, n-k) = C(n-1, k-1). \end{array}$$

5.4 Soluciones a ecuaciones de recurrencia

Supongamos que queremos determinar el número a_n de de composiciones del entero n cuyas partes son todas mayores o iguales a 1. Procedemos como antes: sea $S := \cup_{k\geq 0} N_3^k$. Entonces a_n es el número de elementos de S de peso n, es decir,

$$\begin{aligned}
a_n &= [x^n]\Phi_S(x) = [x^n]\Phi_{\cup_{k\geq 0} N_3^k}(x) \\
&= [x^n]\textstyle\sum_{k\geq 0}\Phi_{N_3^k}(x) \\
&= [x^n]\textstyle\sum_{k\geq 0}(\Phi_{N_3}(x))^k \\
&= [x^n]\textstyle\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 3} x^i \\
&= [x^n]\textstyle\sum_{k\geq 0}(x^3(1-x)^{-1})^k \\
&= [x^n]\tfrac{1}{1-x^3(1-x)^{-1}} \\
&= [x^n]\tfrac{1-x}{1-x-x^3}.
\end{aligned}$$

Determinar el coeficiente de x^n de la función racional anterior requiere de cierta paciencia. Un método alternativo es el siguiente: supongamos que

$$\sum_{i\geq 0} a_i x^i = \frac{1-x}{1-x-x^3}.$$

Multiplicando ambos lador por $1-x-x^3$ obtenemos

$$\sum_{i\geq 0} a_i x^i - \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+1} - \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+3} = 1-x.$$

Igualando coeficiente a coeficiente tenemos que para $n=0$ $a_0=1$, para $n=1$ $a_1-a_0=-1$ de donde $a_1=0$, para $n=2$ tenemos que $a_2-a_1=0$ por lo que $a_2=0$, finalmente para $n\geq 3$ tenemos que $a_n-a_{n-1}-a_{n-3}=0$. Llamamos a la relación $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$ **relación de recurrencia de orden 3 con coeficientes constantes** y llamamos a los valores iniciales $a_0=1, a_1=0, a_2=0$ las **condiciones iniciales** de la relación.

5.5 Funciones racionales y relaciones de recurrencia

A menudo ocurre que una función generadora es una función racional, es decir, un cociente de polinomios como en el ejemplo de la sección anterior. Supongamos pues que

$$\sum_{i\geq 0} a_i x^i = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $q(x) \neq 0$,

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j x^j \text{ y } q(x) = 1 + \sum_{j=1}^{k} q_j x^j,$$

para alguna k fija. Multiplicamos ambos lados por $q(x)$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} q(x)\sum_{i\geq 0} a_i x^i & = & p(x) \\ (1+\sum_{j=1}^{k} q_j x^j & = & \sum_{j=0}^{k-1} p_j x^j \\ \sum_{i\geq 0} a_i x^i + q_1 \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+1} + \cdots + q_k \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+k} & = & \sum_{j=0}^{k-1} p_j x^j. \end{array}$$

Igualando los coeficientes de x^n en ambos lados de la ecuación obtenemos, para $n \geq k$

$$a_n + q_1 a_{n-1} + \cdots + q_k a_{n-k} = 0,$$

de donde obtenemos la siguiente relación de recurrencia para $n \geq k$

$$a_n = -q_1 a_{n-1} - \cdots - q_k a_{n-k}$$

con las k condiciones iniciales siguientes (igualando coeficientes de x^n en ambos lados para $0 \leq n \leq k-1$)

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & p_0 \\ a_1 + q_1 a_0 = p_1 & & \\ & \vdots & \\ a_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} q_j a_{k-1-j} & = & p_{k-1}. \end{array}$$

5.6 Ejercicios

1. Encuentra explícitamente $\Phi_S(x)$ si $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\omega(i) = i$ si i es par y $\omega(i) = i - 1$ si i es impar.

2. Calcula $[x^3](1+x)^7(1-x)^{-2}$ y $[x^n](1-2tx)^{-k}$.

3. Sean k y n enteros positivos fijos. Calcula el número de soluciones a la ecuación $y_1 + \cdots + y_n = k$ donde $y_i \in \{0, 1\}$ para $i = 1, \ldots, n$.

4. Encuentra el número de composiciones de n con k partes y cada parte a lo mas 5.

5. Calcula el número de enteros positivos menores a 1000000 cuyos dígitos sumen 17.

6. Encuentra la función generadora para el número de composiciones en k partes de n de tal manera que la i-ésima parte sea $\leq 5i$ para $i = 1, \ldots, k$.

7. Cuenta el número de k-combinaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no contengan enteros consecutivos.

8. Cuenta el número de k-combinaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que el i-ésimo elemento $c_i \equiv i (\text{mod } 2)$.

9. Calcula $[x^k]\frac{10x^2+2x+1}{-2x^3-3x^2+1}$.

10. resuelve las relaciones de recurrencia

    (a) $a_n = 4a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; $a_0 = 0, a_1 = 1$.

    (b) $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3}$, $(n \geq 3)$; $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.

    (c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + 8a_{n-4}$, $(n \geq 4)$; $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$.

11. Encuentra la relación de recurrencia cuya función generadora es

$$(1+x+x^2)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(x+x^2+x^3+\cdots).$$

12. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones y $A(x)$ y $B(x)$ sus funciones generadoras asociadas. Expresa $A(x)$ en función de $B(x)$ si

    a. $a_0 = 0$ y $a_n = b_{n-1}$ para $n \geq 1$.

    b. $a_n = b_{n+k}$, con k entero positivo.

    c. $a_n = \sum_{i \geq n+1} b_i$.

13. Encuetra el número de números de n dígitos formados con $1, 2, 3$, en los cuales el primero y el último dígitos, así como cada par de dígitos vecinos, son diferentes.

14. Encuntra el número de maneras de colorear los vértices de un polígono de n lados de tal manera que vértices vecinos reciban colores distintos si en total se tienen k colores.

15. Encuentra el número de sucesiones binarias de longitud 11 que no contienen tres unos consecutivos.

Chapter 6

Cuadrados latinos

Sea R un conjunto finito con n elementos. Un **cuadrado latino** de orden n es un arreglo $n \times n$ con entradas en R tal que cada símbolo de R aparece exactamente una vez en cada renglón y en cada columna de dicho arreglo.

Ejemplo: cuadrado latino de orden 4 con entradas en $R = \{a, b, c, d\}$

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

Nota que para construir el cuadrado latino en el ejemplo anterior simplemente rotamos cíclicamente el primer renglón del arreglo.

Diremos que dos cuadrados Latinos de orden n, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, son **ortogonales** si para cualquier par (k, l) de elementos de R existen valores únicos par i y para j tales que $a_{ij} = k$ y $b_{ij} = l$. Es decir si sobreponemos un cuadrado sobre el otro obtenemos los n^2 pares ordenados distintos de R^2. Un conjunto $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de cuadrados Latinos se dice **conjunto de cuadrados Latinos mutuamente ortogonales** si, tomados por pares, son ortogonales.

Ahora bien, sea $\mathcal{P}$ un plano proyectivo de orden n. Como vimos, $\mathcal{P}$ tiene $n^2 + n + 1$ puntos, cada línea contiene $n + 1$ puntos y en cada punto inciden $n + 1$ líneas. Sea l cualquier línea de $\mathcal{P}$. En l distinguimos a dos puntos, digamos a V y a H. Sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ las líneas, distintas de l, que pasan por V y por H respectivamente. Entonces a todo punto P de $\mathcal{P}$, fuera de l, le podemos asignar las coordenadas (i, j) si las líneas x_i y y_j inciden en P. Sea C_m uno de los $n - 1$ puntos restantes en la línea l. En C_m inciden n líneas, digamos $\{l_1, \ldots l_n\}$, distintas a l. Construimos el cuadrado latino de orden n $A_m = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = k$ si el punto (i, j) pertenece a l_k. De esta manera, variando m, construimos un conjunto de $n - 1$ cuadrados latinos de orden n mutuamente ortogonales.

Recíprocamente sea $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ un conjunto de cuadrados latinos mutuamente ortogonales. Construimos un plano proyectivo de orden n como sigue: partimos de la línea $l := \{V, H, C_1, \ldots, C_{n-1}\}$, sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ haces de n líneas por V y H respectivamente. Los puntos de nuestro plano son entonces los puntos de la línea l y los puntos de la forma (i, j) donde se intersectan las líneas x_i y y_j. Una línea l_h por C_m la definimos como $\{C_m\} \cup \{(i, j) | (A_m)_{ij} = h\}$. Obtenemos un plano proyectivo de orden n.

Podemos dar un tratamiento algebraico a lo anterior: Supongamos que $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y sea $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ un conjunto de cuadrados latinos mutuamente ortogonales. Podemos suponer ademas que dichos cuadrados están descritos en forma **standard**, es decir su primera columna es igual a $(0, 1, \ldots, n-1)^t$ y que A_x tiene entrada $(0, 1)$ igual a x, para $x = 1, \ldots, n-1$. Definimos en R la operación ternaria $T(x, i, j) := (A_x)_{ij}$ si $x \neq 0$ y $T(0, i, j) := i$ para toda $i, j \in R$.

Podemos definir un plano proyectivo de orden n como sigue: los puntos son el conjunto

$$R^2 \cup \{(x) | x \in R\} \cup \{(\infty) | \infty \notin R\},$$

las líneas son

$$\{[m, k] | m, k \in R\} \cup \{[x] | x \in R\} \cup \{[\infty] | \infty \notin R\},$$

y las relaciones de incidencia son

1. $(x, y) \in [m, k]$ si y solo si $T(m, x, y) = k$
2. $(x, y) \in [k]$ si y solo si $x = k$
3. $(x) \in [m, k]$ si y solo si $x = m$
4. $(x) \in [\infty]$ para toda $x \in R$
5. $(\infty) \in [\infty]$.

Podemos definir dos operaciones binarias en R: $a + b := T(1, a, b)$ y $a \cdot b := T(a, 0, b)$. Un buen tema de investigación es tratar de determinar las propiedades algebraicas de $(R, +, \cdot)$.

6.1 Ejercicios

1. Supón que los triángulos ΔABC y ΔDEF están en perspetiva. Si los triángulos ΔABC y ΔEFD están en perspectiva, demuestra que los triángulos ΔABC y ΔFDE están en perspectiva.

2. Sean A, B, C puntos de una cónica S. Sean A' el punto de intersección de la tangente a S en A con la línea BC, B' el punto de intersección de la tangente a S en B con la línea AC y C' el punto de intersección de la tangente a S en C con la línea AB. Demuestra que los puntos A', B' y C' son colineales.

3. Las dos tangentes desde un punto O a una cónica dada la intersectan en los puntos A y B. Una línea variable l se traza sobre un punto de la línea AB intersectando a OA y OB en los puntos P y Q respectivamente. Demuestra que el lugar geométrico de los puntos de intersección L de las otras dos tangentes a la cónica desde P y Q es una línea.

4. Demuestra que el conjunto de transformaciónes de Möbius es el conjunto de todas las transformaciones de Möbius con $ad - bc = 1$.

5. Construye explícitamente 2 cuadrados latinos de orden 3 mutuamente ortogonales en el conjunto $\{0, 1, 2\}$.

6. Usa los dos cuadrados latinos del ejercicio anterior para construir un plano proyectivo de orden 3. Dale coordenadas a los puntos y a las líneas en términos de los símbolos que usaste para construir dichos cuadrados latinos.

7. Escribe los dos cuadrados latinos anteriores en forma estandard. Demuestra que el conjunto $\{0, 1, 2\}$ junto con las operaciones binarias $a + b := T(1, a, b)$ y $a \cdot b := T(a, 0, b)$, definidas en el último párrafo de la sección anterior, es el campo $\mathbb{Z}_3$.

Chapter 7

Tripletas de Steiner

Chapter 8

Método de enumerción de Polya